**Числовые ряды, их суммы, сходимость, примеры**

* [**Понятие о числовом ряде**](https://function-x.ru/rows1.html#paragraph1)
* [**Сумма числового ряда**](https://function-x.ru/rows1.html#paragraph2)
* [**Понятие сходимости числовых рядов**](https://function-x.ru/rows1.html#paragraph3)
* [**Свойства сходящихся числовых рядов**](https://function-x.ru/rows1.html#paragraph4)
* [**Необходимый признак сходимости числового ряда**](https://function-x.ru/rows1.html#paragraph5)

**Будут и задачи для самостоятельного решения, к которым можно посмотреть ответы.**

**Понятие о числовом ряде**

Первое знакомство с ***числовыми рядами*** у наших читателей состоялось в средней школе при изучении арифметической прогрессии и геометрической прогрессии. Из этих уроков Вы узнали, что для задания этих последовательностей необходимо определить закон нахождения каждого члена последовательности, обычно записываемый в виде формулы.

Если *u*1, *u*2, *u*3, ..., *u*n, ... - бесконечная последовательность чисел, то формально записанное выражение

*u*1 + *u*2 + *u*3 + ... + *u*n + ...              (1)

называется ***бесконечным числовым рядом (или просто числовым рядом)***. Многоточие в конце (иногда шутят, что в нём-то и заключена суть ряда) указывает, что выражение (1) не имеет последнего слагаемого, за каждым слагаемым всегда стоит следующее. Таким образом, ***числовой ряд есть "бесконечная" сумма чисел***.

Короче (с символом "сигма") числовой ряд (1) можно записать в виде https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image006.gif

где индексы внизу и вверху символа суммы означают, что нужно взять сумму чисел *u*n, когда *n* принимает целочисленные значения от 1 до ∞.

Числа *u*1, *u*2, *u*3, ..., *u*n, ... называются ***членами числового ряда***, а член ряда, стоящий на *n*-м месте от начала, - его ***общим членом***.

***Примерами числовых рядов могут служить***:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image011.gif            (2)

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image013.gif                            (3)

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image015.gif                                     (4)

***Задать числовой ряд*** – это значит указать правило, закон образования его членов, по которому можно найти любой его член (ещё раз вспомните школьные уроки об арифметической и геометрической прогрессиях). Чаще всего числовой ряд задаётся формулой общего члена как функция от натурального числа *n*. Например, если https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image017.gif, то тем самым определён следующий числовой ряд:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image019.gif                                (5)

если https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image021.gif то получим числовой ряд

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image023.gif                                (6)

Если в дальнейшем будем говорить, что дан числовой ряд, то будем подразумевать, что задан его общий член.

**Пример 1.** Записать первые пять членов числового ряда, если дана формула его общего члена:

https://function-x.ru/chapter9-1/r6.gif.

Решение. Подставляем в формулу вместо *n* последовательно числа 1, 2, 3, 4, 5. Получаем:

https://function-x.ru/chapter9-1/r7.gif

**Пример 2.** Записать формулу общего члена числового ряда, если даны пять его первых членов:

https://function-x.ru/chapter9-1/r8.gif

Решение. Ищем закономерность образования членов ряда. Нетрудно заметить, что знаменатель является числом 3 в некоторой степени. Для первого члена ряда степень равна нулю, то есть 1 - 1, для второго члена степень равна 1, то есть 2 - 1, для пятого - 4, то есть 5 - 1. Следовательно, степень числа три равна *n* - 1. В свою очередь, в числителе число всегда на 2 меньше 3*n*. Следовательно, формула общего члена ряда:

https://function-x.ru/chapter9-1/r9.gif

**Решить задачи на числовые ряды самостоятельно, а затем посмотреть решения**

**Пример 3.**Записать первые 3 члена ряда https://function-x.ru/chapter9-2/nr001.gif и https://function-x.ru/chapter9-2/nr002.gif.

[**Посмотреть правильное решение и ответ**](https://function-x.ru/rows1_s1.html).

**Пример 4.**Определить общий член ряда

https://function-x.ru/chapter9-2/nr008.gif.

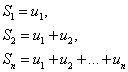
[**Посмотреть правильное решение и ответ**](https://function-x.ru/rows1_s2.html).

**Сумма числового ряда**

При сложении конечного числа слагаемых всегда получается определённый числовой результат, вычислить же сумму бесконечного числа слагаемых не может ни человек, ни компьюьтер, поскольку процесс сложения членов числового ряда (по самому определению) никогда не кончается.

Это означает, что выражение (1) является формальным, ведь сумма бесконечного числа слагаемых не определена. Но тем не менее в этом выражении поставлен знак суммирования и подразумевается, что члены ряда как-то складываются. Сумма любого **конечного** числа слагаемых будет найдена, если их складывать последовательно по одному. Это приводит к мысли поставить в соответствие числовому ряду некоторое число и назвать его **суммой числового ряда**. С этой целью вводят понятие **частичной суммы ряда**.

Приближенные суммы числового ряда (1)



называются ***частичными суммами числового ряда***.

**Сумма *n* первых членов числового ряда называется *n*-й частичной суммой**:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image027.gif                             (7)

Частичные суммы числового ряда имеют конечное число слагаемых, это «обычные» суммы, их можно найти, подсчитать. Для числового ряда получаем бесконечную последовательность его частичных сумм.

**Понятие сходимости числовых рядов**

Если значения частичных сумм https://function-x.ru/chapter9-1/r2.gif при неограниченном возрастании *n*, то есть, при https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image029.gif стремятся к некоторому числу *S*, то есть имеет предел

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image031.gif                                          (8)

то ***числовой ряд называется сходящимся***.

Это число *S* называется ***суммой числового ряда***. В этом смысле можно записать такое равенство:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image033.gif                       (9)

Пример сходящегося числового ряда:

https://function-x.ru/chapter9-1/r5.gif

**Не для всякого числового ряда последовательность его частичных сумм стремится к определённому пределу**. Например, для ряда

https://function-x.ru/chapter9-1/r3.gif

частичные суммы https://function-x.ru/chapter9-1/r2.gif принимают попеременно значения 1 и 0:



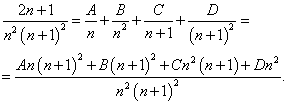
Если предел последовательность частичных сумм ряда не существует, то ***числовой ряд называется расходящимся***. Расходящийся ряд суммы не имеет.

**Пример 5.** Определить частичную сумму числового ряда

https://function-x.ru/chapter9-1/r12.gif,

разложив общий член ряда на элементарные дроби с помощью [**метода неопределённых коэффициентов**](https://function-x.ru/integral201.html), и найти сумму ряда.

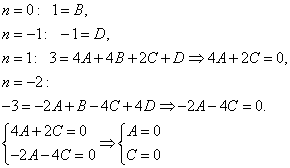
Решение. Разложим общий члена ряда на элементарные дроби:



Так как дроби равны и знаменатели равны, числители также должны быть равны:

https://function-x.ru/chapter9-1/r14.gif

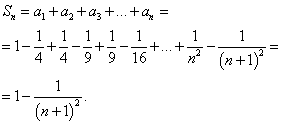
Это равенство в силе для всех *n*:



Таким образом,

https://function-x.ru/chapter9-1/r16.gif.

Частичная сумма ряда:

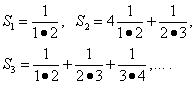


Сумма ряда:

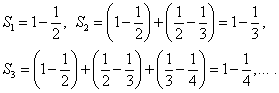
https://function-x.ru/chapter9-1/r18.gif.

**Пример 6. Исследовать сходимость числового ряда** (2) https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image011.gif.

Решение. Составим частичные суммы ряда:



Представим их в виде



Нетрудно заметить закономерность в образовании частичных сумм: каждая представляет разность между единицей и дробью, числитель которой 1, а знаменатель *n*-й частичной суммы равен *n*+ 1, т.е.

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image039.gif

Найдём предел последовательности частичных сумм:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image041.gif

Следовательно, числовой ряд (2) сходится, его последовательность равна 1.

**Исследуем сходимость числового ряда** (3):

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image043.gif

который называется геометрическим, так как его члены представляют собой члены геометрической прогрессии, первый член которой равен *a*, а знаменатель *q*.

Рассмотрим частичную сумму этого ряда:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image045.gif

Она равна сумме членов геометрической прогрессии, если

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image047.gif

те есть

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image049.gif

Найдём предел последовательности частичных сумм геометрического ряда. Следует различать четыре возможности:

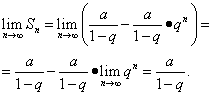
1) https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image051.gif

2) https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image053.gif

3) https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image055.gif

4) https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image057.gif

1. Если https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image059.gif то https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image061.gif, поэтому



2. Если https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image065.gif то https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image067.gif не существует, значит и последовательность частичных сумм не имеет предела.

3. Если *q*=1, то получается ряд *a*+ *a*+ *a*+...+ ... . Его *n*-я частичная сумма

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image069.gif при https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image071.gif

в зависимости от знака *a*.

4. Если *q* = - 1, то получается ряд

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image073.gif

Его частичные суммы попеременно равны *a* и 0:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image075.gif

и т.д. Но такая последовательность не имеет предела.

Мы выяснили, что геометрический ряд (3) сходится, если знаменатель меньше единицы:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image059_0000.gif

причём его сумма равна

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image078.gif,

и расходится, если равен или больше единицы:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image080.gif

**Пример 7. Исследовать сходимость числовых рядов**:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image082.gif                     (\*)

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image084.gif             (\*\*)

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image086.gif              (\*\*\*)

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image088.gif             (\*\*\*\*)

Решение. Это геометрические ряды. Для ряда (\*)

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image090.gif

для ряда (\*\*)

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image092.gif

для ряда (\*\*\*) *q*= 4/3; для ряда (\*\*\*\*) *q*= - 1. Следовательно, первые два ряда сходятся, а последние два расходятся.

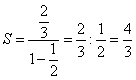
**Пример 8.** Опредедить, сходится ли числовой ряд

https://function-x.ru/chapter9-1/r30.gif.

В случае положительного ответа найти его сумму.

Решение. Данный ряд является геометрическим рядом с первым членом https://function-x.ru/chapter9-1/r31.gif и https://function-x.ru/chapter9-1/r32.gif. Так как https://function-x.ru/chapter9-1/r33.gif, ряд сходится. Сумму ряда найдём по формуле суммы геометрического ряда https://function-x.ru/chapter9-1/r34.gif.

Таким образом,

.

**Установить сходимость ряда самостоятельно, а затем посмотреть решение**

**Пример 9.**Установить, сходится ли ряд

https://function-x.ru/chapter9-2/nr011.gif.

[**Посмотреть правильное решение и ответ**](https://function-x.ru/rows1_s3.html).

[**Нет времени вникать в решение? Можно заказать работу!**](https://function-x.ru/homework.html)

[**К началу страницы**](https://function-x.ru/rows1.html)

[**Пройти тест по теме Ряды**](https://function-x.ru/test_rows.php)

**Свойства сходящихся числовых рядов**

Пусть дан ряд с общим членом https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image008_0000.gif. Тогда ряд с общим членом https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image097.gif, то есть ряд

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image099.gif         (11)

называют произведением ряда (1) на число *c*. Сходимость ряда (1) гарантирует сходимость и его произведения на число *c*. Это устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 1.**Если ряд (1) сходится и имеет сумму, равную *S*, то его произведение на число *c*также сходится и имеет сумму, равную *S*:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image101.gif                               (12)

Следовательно, общий множитель членов сходящихся рядов можно выносить за скобки, имея при этом в виду выполнение равенства (12).

Пусть даны два ряда с общими членами https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image008_0001.gifи https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image104.gif:

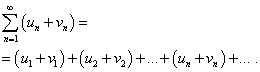
https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image106.gif     (13)

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image108.gif       (14)

Тогда ряд с общим членом

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image110.gif

называют суммой этих рядов:

         (15)

**Теорема 2.** Сумма двух сходящихся рядов есть сходящийся ряд, причём его сумма равна

*S* ' + *S* '',

где *S* ' и *S* ''- суммы слагаемых рядов:

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image120.gif             (16)

Это означает, что сходящиеся ряды можно почленно складывать, а с учётом теоремы 1 и вычитать, имея при этом в виду для суммы рядов выполнение равенства (16), а для разности рядов – равенства

https://function-x.ru/chapter9-1/rows1_clip_image122.gif

**Определение.** Разность суммы *S* и частичной суммы *S*n сходящегося числового ряда разывается ***остатком ряда*** и обозначается *R*n:

https://function-x.ru/chapter9-1/r19.gif.

Для сходящегося ряда

https://function-x.ru/chapter9-1/r20.gif,

то есть предел остатка сходящегося ряда при https://function-x.ru/chapter9-1/r21.gif равен нулю.

**Теорема 3.**Если ряд сходится, то сходится и любой его остаток, и, наоборот, если сходится какой-либо остаток ряда, то и сам ряд также сходится.

Это означает, что на сходимость ряда не влияет любое конечное число его первых членов. В ряде можно отбрасывать или прибавлять к нему любое конечное число членов. От этого сходимость (или расходимость) ряда не нарушается, но меняется его сумма.

Если сходимость ряда установлена на основании определения сходимости, то одновременно будет найдена и его сумма. Так мы поступили при исследовании сходимости рядов (2) и (3). Однако таким способом решить вопрос о сходимости ряда часто бывает весьма трудно. Поэтому используют другой способ, который даёт возможность лишь установить факт сходимости (расходимости) ряда, так как сумму сходящегося ряда можно всегда найти с любой степенью точности, подсчитав сумму достаточно большого числа его первых членов.

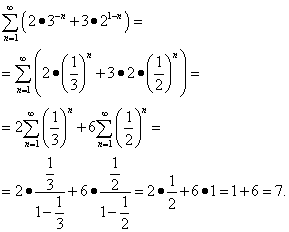
**Пример 10.** Найти сумму числового ряда

https://function-x.ru/chapter9-1/r22.gif.

Решение. Из теорем 1 и 2 о свойствах сходящихся рядов следует:

если ряды https://function-x.ru/chapter9-1/r23.gif и https://function-x.ru/chapter9-1/r24.gif сходятся и https://function-x.ru/chapter9-1/r25.gif и https://function-x.ru/chapter9-1/r26.gif, то для любых действительных чисел *α* и *β* ряд https://function-x.ru/chapter9-1/r27.gif также сходится и https://function-x.ru/chapter9-1/r28.gif.

Поэтому



Приступим к признакам сходимости рядов.

**Необходимый признак сходимости числового ряда**

**Теорема.**Если ряд сходится, то предел его общего члена при

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image002.gif

равен нулю:

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image004.gif                        (17)

**Следствие.**Если предел общего члена ряда при

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image002_0000.gif

не равен нулю, то ряд расходится.

**Пример 11. Используя необходимый признак сходимости, исследовать сходимость числового ряда**

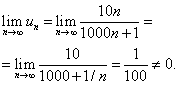
https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image007.gif

Решение. Общий член ряда

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image009.gif

Найдём его предел при

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image002_0001.gif:



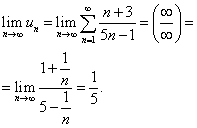
Следовательно, данный ряд расходится.

**Пример 12. Используя необходимый признак сходимости, исследовать сходимость числового ряда**

https://function-x.ru/chapter9-1/r36.gif

Решение. Найдём предел общего члена ряда при

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image002_0001.gif:



Так как https://function-x.ru/chapter9-1/r38.gif (предел общего члена не равен нулю), данный ряд расходится.

**Установить сходимость ряда самостоятельно, а затем посмотреть решение**

**Пример 13.**Используя необходимый признак сходимости, установить, сходится ли ряд

https://function-x.ru/chapter9-2/nr013.gif.

[**Посмотреть правильное решение и ответ**](https://function-x.ru/rows1_s4.html).

**Пример 14.**Установить, сходится ли ряд

https://function-x.ru/chapter9-2/nr016.gif.

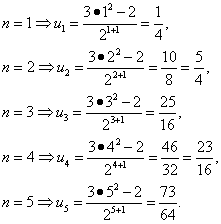
[**Посмотреть правильное решение и ответ**](https://function-x.ru/rows1_s5.html).

**Пример 15. Записать первые пять членов числового ряда**

https://function-x.ru/chapter9-1/r39.gif

и установить, сходится ли этот ряд.

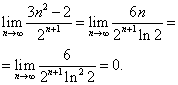
Решение. Пять первых членов данного числового ряда:



Найдём предел общего члена ряда при

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image002_0001.gif,

применяя дважды [**правило Лопиталя**](https://function-x.ru/derivative3.html):



Так как https://function-x.ru/chapter9-1/r43.gif (предел общего члена равен нулю), данный ряд сходится.

Мы выяснили, что если числовой ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю, а значит, выполняется условие (17).

Однако выполнение условия (17) не гарантирует сходимости числового ряда, оно не является достаточным для этого. Есть расходящиеся ряды, пределы общих членов которых при

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image002_0002.gif

равны нулю.

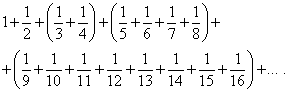
Примером такого ряда служит ряд (4):

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image015.gif

который называется гармоническим. Последовательность его частичных сумм

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image017.gif

монотонно возрастает, поскольку члены ряда положительны. Покажем, что она возрастает неограниченно. Для этого члены гармонического ряда, начиная с третьего, объединим в группы:



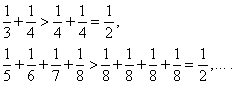
В первую включим два члена (3-й и 4-й), во вторую

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image021.gif

члена (с 5-го по 8-й), в третью

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image023.gif

членов (с 9-го по 16-й) и т.д, каждый раз увеличивая вдвое число членов в группе. Таких групп, очевидно, бесконечное множество. Если заменить члены ряда в каждой группе их последними членами, то сумма членов этой группы уменьшится и тогда справедливы неравенства



Сумма членов каждой группы больше 1/2, а сумма членов, включённых в достаточно большое число групп, как угодно велика. Следовательно, последовательность частичных сумм гармонического ряда неограниченно возрастает, а ряд расходится, хотя его общий член

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image027.gif

при

https://function-x.ru/chapter9-2/rows2_clip_image002_0003.gif

стремится к нулю.

Заметим, что частичные суммы гармонического ряда возрастают хотя и ограниченно, но медленно.